ANALYSE MATHÉMATIQUE. – *Sur les racines complexes des systèmes d'équations algébriques comportant peu de termes.* Note (*) de **Askold Hovansky**, présentée par René Thom.

La règle de Descartes permet de majorer le nombre des racines positives d'une équation polynomiale. Si le polynôme comporte k monômes, les solutions positives sont au nombre au plus égal à $(k-1)$. Le même phénomène a lieu dans un secteur angulaire assez petit pour les racines complexes de l'équation

(1) $$x^N=1$$

et on remarque, pour N arbitrairement grand, une équirépartition des racines.

On démontre ici qu'un phénomène analogue se produit non seulement pour l'exemple trivial (1), mais aussi pour des systèmes quelconques d'équations polynomiales contenant peu de monômes.

We show that the roots of a system of polynomial equations with few monomials scatter uniformly with respect to the argument (as the degree increases). The assertions are valid for a large class of exponential functions.

1. Notations et formulation des résultats. – On appelle $\mathbf{R}^n$ la partie réelle de l'espace complexe $\mathbf{C}^n$ et $i\,\mathbf{R}^n$, la partie purement imaginaire. On pose :

$$z=x+iy; \qquad x,\ y\in\mathbf{R}^n$$

A chaque covecteur réel a de $(\mathbf{R}^n)^*$ on associe la forme linéaire :

$$\langle a, z\rangle=\langle a, x\rangle+i\langle a, y\rangle.$$

Une *fonction exponentielle* est une somme finie de la forme :

$$f(z)=\sum\lambda_a\exp\langle a, z\rangle, \qquad a\in\Lambda, \quad \lambda_a\in\mathbf{C}^*,$$

où Λ fini s'appelle le *spectre* de f, et son enveloppe convexe le *polyèdre de Newton* de f. A chaque face Γ de Δ(de dimension quelconque) on associe :

$$f^\Gamma(z)=\sum_{a\in\Gamma\cap\Lambda}\lambda_a\exp\langle a, z\rangle.$$

Considérons le système de n équations exponentielles à n variables complexes :

$$f=0:\begin{cases} f_1=0\\ \vdots\\ f_n=0\end{cases}$$

où chaque f_i a pour polyèdre de Newton Δ_i. Nous dirons que le choix des faces Γ_i des Δ_i est *bon* s'il existe une forme linéaire non nulle sur $\mathbf{R}^n$ dont la borne supérieure sur Δ_i est atteinte sur Γ_i. La famille :

$$f_1^{\Gamma_1}=\ldots=f_n^{\Gamma_n}=0,$$

s'appelle réduction de f (selon les Γ_i) si le choix (Γ_i) est bon. Ce système réduit (après simplification de la i-ième équation par $\exp\langle a_i, z\rangle$, où a_i est un point quelconque de $\Gamma_i\cap\Lambda_i$) ne dépend que d'un nombre inférieur des variables, et est, en général, sans solution.

Le système (1) est dit *non dégénéré* dans l'ouvert $\mathbf{R}^n\times i\,\mathrm{G}$ (G ouvert de $\mathbf{R}^n$) si et seulement si :

(*a*) toutes les racines du système dans cet ouvert sont isolées;

(*b*) tous les systèmes réduits sont sans solution (pour tout bon choix des Γ_i) dans cet ouvert.

La multiplication de l'équation $f=0$ par $\exp\langle a, z\rangle$ réalise sur le spectre de cette équation la translation par a, mais ne change pas l'ensemble de ses racines. Un ensemble fini Λ est appelé *spectre approché* du système (1) si chaque spectre Λ_i peut être translaté par un covecteur a_i tel que $\Lambda_i + a_i \subset \Lambda$.

A chaque spectre approché Λ associons le polyèdre approché Δ qui est l'enveloppe convexe de $\Lambda \cup (-\Lambda)$ et l'ouvert Δ^* de $\mathbf{R}^n$ défini par les conditions :

$$y \in \Delta^* \Leftrightarrow \forall \quad a \in \Delta, \quad |\langle a, y\rangle| < \pi/2|.$$

Fixons l'ouvert $G \subset \mathbf{R}^n$ de volume n-dimensionnel fini $V(G)$ et choisissons un spectre approché Λ du système (1). Désignons par $N(f, G)$ le nombre de racines du système (1) dans l'ouvert $\mathbf{R}^n \times i G$, par $V(\Delta_1, \ldots, \Delta_n)$ le volume mixte des Δ_i, et par $\Pi(\Delta^*, \partial G)$ le nombre minimal de figures égales à Δ^* qui permettent de recouvrir la frontière de G.

THÉORÈME. — *Il existe une fonction $\varphi(K, n)$ telle que pour tout système exponentiel f non dégénéré dans $\mathbf{R}^n \times i G$, de spectre approché Λ contenant au plus k points, on ait :*

$$\left| N(f, G) - \frac{n!}{(2\pi)^n} V(\Delta_1, \ldots \Delta_n) . V(G) \right| < \varphi(k, n) . \Pi(\partial G, \Delta^*).$$

II. APPLICATIONS.

COROLLAIRE 1. — *Si le système $f=0$ est dégénéré dans $\mathbf{R}^n \times i G$ mais n'a dans cet ouvert que des racines isolées, alors :*

$$N(f, G) - \frac{n!}{(2\pi)^n} V(\Delta_1, \ldots, \Delta_n) V(G) < \varphi(k, n) \pi(\partial G, \Delta^*).$$

COROLLAIRE 2. — *Dans les conditions du corollaire 1, et si G est contenu dans Δ^*, alors :*

$$N(f, G) < \varphi(n, k) + C(n),$$

où $C(n)$ ne dépend que de n.

COROLLAIRE 3. — *La somme des multiplicités de toutes les racines du systèmes (1) avec des parties imaginaires fixées est bornée par $\varphi(n, k)$.*

En particulier :

(*a*) *la multiplicité de toute racine est au plus égale à $\varphi(n, k)$;*

(*b*) *pour un système à coefficients réels le nombre de racines positives est au plus $\varphi(n, k)$.*

Le point (*b*) est démontré dans [1].

Pour énoncer le corollaire qui suit, introduisons une métrique spéciale dans $\mathbf{C}^n$ Soit $\{a_i\} = M \subset \mathbf{R}^{n*}$ un ensemble fixé de $(m+1)$ éléments $(i=0, \ldots, m)$. On lui associe l'« application de Véronèse » [2] :

$$\psi_M : \quad \mathbf{C}^n \to \mathbf{CP}^m,$$

définie par la formule $\psi_M(2) = \exp\langle a_0, z\rangle : \ldots \exp\langle a_m, z\rangle$. L'application ψ_M induit par image réciproque de la métrique standard sur $\mathbf{CP}^m$ une métrique ρ_M sur $\mathbf{C}^n$

Considérons le système $f_1 = \ldots = f_l = 0$ formé de $l(<n)$ équations de polyèdres de Newton $\Delta_1, \ldots, \Delta_l$. Supposons que l'ensemble analytique qu'il définit dans $\mathbf{R}^n \times i G$ a la dimension complexe $n-k$ et désignons par $V_M(f, G)$ son volume $2(n-k)$-dimensionnel pour la métrique ρ_M.

COROLLAIRE 4 :

$$\left| V_M(f, G) - \frac{n!}{(2\pi)^n} V(\Delta_1, \ldots, \Delta_l, \square, \ldots, \square) V(G) \right| < \varphi(n, k) \Pi(\partial G, \Delta^{(n-l) \text{ fois}}),$$

où $\square$ *désigne l'enveloppe convexe de* M, *et* k *et l'ouvert* Δ^* *correspondent à un spectre approché (quelconque)* Λ *de la famille des spectres* $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_l$.

Dans certains cas on peut donner une estimation des quantités qui figurent dans l'énoncé du théorème. Considérons $\mathbf{C}^n$ muni de la métrique usuelle. Associons à la famille des polyèdres $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ deux nombres R et r : R est le plus grand des rayons R_i des sphères exinscrites à (Δ_i) et de même r est le plus petit des rayons r_i des sphères inscrites dans Δ_i. Nous dirons que la dimension d'un ensemble X est au plus égale à α s'il existe des constantes C et ε_p telles que pour ε positif inférieur à ε_0 on puisse recouvrir X par des sphères de rayon ε en nombre moindre que $C\varepsilon^{-\alpha}$

Corollaire 5. — *Soit* $f=0$ *un système non dégénéré dans* $\mathbf{R}^n \times i\,\mathbf{R}^n$ *de polyèdres de Newton* $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ *et* $\dim \Delta_i = n$. *Soit* G *un ouvert tel que* $\dim \partial G \leqq \alpha < n$. *Alors pour* $\lambda \to \infty$:

$$N(f, \lambda G) \Big/ \frac{n\,!}{(2\pi)^n} V(\Delta_1, \ldots, \Delta_n) V(G) \lambda^n \to 1.$$

Une version plus faible de ce résultat est démontrée dans [2] et [3].

Corollaire 6. — *Fixons un ouvert* G *tel que* $\dim \partial G \leqq \alpha < n$. *Considérons des systèmes non dégénérés dans* $\mathbf{R}^n \times i\,G$, *pour lequel le nombre de termes exponentiels est borné, et le rapport* R/r *est borné supérieurement, tandis que la quantité* R *tend vers l'infini. Alors :*

$$N(f, G) \Big/ \frac{n\,!}{(2\pi)^n} V(\Delta_1, \ldots, \Delta_n) V(G) \to 1.$$

III. Application a l'algèbre. — L'application $(x_i = e^{z_i})$ fait correspondre à chaque système d'équations polynomiales $P_j(x)=0$, $x=(x_1, \ldots, x_n)$, $x \in (\mathbf{C} \setminus 0)^n$ un système exponentiel en les variables z_i. Le rôle de l'ouvert $\mathbf{R}^n \times i\,G$ est joué dans le cas algébrique par des cônes de $(\mathbf{C} \setminus 0)^n$ formé des vecteurs x_i de modules quelconques mais d'arguments décrivant un ouvert fixé du tore T^n On peut traduire dans cette situation le théorème et ses corollaires (sauf le corollaire 5). Ainsi le corollaire 1 montre que dans un ouvert assez petit de l'espace des arguments le nombre des solutions est borné en fonction seulement du nombre de monômes qui figurent dans les équations (*cf.* [1]).

Le corollaire 6 montre que si on fait croître les polyèdres de Newton des équations sans les aplatir, en gardant borné le nombre de monômes dans les équations, alors les racines du système se distribuent uniformément selon les arguments.

IV. Esquisse de la démonstration. — La preuve du théorème repose sur deux affirmations. Soient $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n$ la famille des spectres des équations $f_1 = \ldots = f_n = 0$ d'enveloppes convexes $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ et $L = \mathbf{C}P^{\Lambda_1} \times \ldots \times \mathbf{C}P^{\Lambda_n}$ le produit d'espaces projectifs correspondant à ces systèmes (chaque équation n'est définie qu'à un scalaire près). A chaque système $a \in L$ nous associons le nombre $N(a, G)$ de ses solutions dans $\mathbf{R}^n \times i\,G$.

Proposition 1. — *Il existe dans l'espace* L *une mesure* $d\mu$ *telle que :*

$$\int N(a, G)\, d\mu = \frac{n\,!}{(2\pi)^n} V(\Delta_1, \ldots, \Delta_n)\, V(G).$$

Cette proposition, inspirée de [4] et [5], fut d'abord démontrée pour un seul polyèdre par A. Konchnirenko, en utilisant les méthodes de géométrie intégrale. Le cas de polyèdres distincts est traité dans [6].

Proposition 2. — *Considérons le système de* n *équations à* n *variables réelles* $x = x_1, \ldots, x_n$, $P_1 = \ldots = P_n = 0$, *dans lequel* P_i *désigne un polynôme de degré* m_i *de* $n+k+2\rho$ *variables réelles*

x, y, u, v :

$$y = y_1, \ldots, y_k,$$

$$u = u_1, \ldots, u_\rho$$

et

$$u_q = \sin\langle b_q, x\rangle, \qquad b_q \in (\mathbf{R}^n)^*,$$

$$v_q = \cos\langle b_q, x\rangle, \qquad q = 1, \ldots, \rho.$$

Le nombre de solutions non dégénérées de ce système dans l'ouvert qui est défini par les inégalités :

$$|\langle b_q, x\rangle| < \pi/2,$$

$$q = 1, \ldots, \rho$$

est borné et ne dépasse pas :

$$m_1 \times \ldots \times m_n \left(\sum m_1 + \rho + 1\right)^{\rho + k} . 2^{\rho + ((\rho + k)(\rho + k - 1)/2)}$$

La preuve de ce théorème repose sur les idées de [1], et on la trouve dans [7].

Le théorème des deux propositions de la manière suivante. Estimons la différence du nombre de solutions de deux systèmes génériques dans l'ouvert $\mathbf{R}^n + i\mathrm{G}$; donc le nombre $|\mathrm{N}(a, \mathrm{G}) - \mathrm{N}(b, \mathrm{G})|$ pour deux points génériques a et b. On considère pour cela les systèmes $a_t = (1-t)a + tb$, pour t parcourant $[0, 1]$. On vérifie aisément que pour des systèmes a et b génériques la composante en x reste bornée pour les racines des systèmes a_t. Il en résulte que la différence que nous considérons est majorée en fonction du nombre d'intersection de la composante en y des racines avec la frontière $\partial\mathrm{G}$ quand t varie de 0 à 1. La partie de la frontière $\partial\mathrm{G}$ recouverte par un seul ouvert Δ^* ne peut rencontrer qu'un nombre fini de composantes en y des racines. A l'aide de la proposition 2 on démontre que ce nombre ne dépasse pas une certaine quantité qui ne dépend que de la dimension et du nombre k d'exponentielles. Il en résulte que toute la frontière ne rencontre au plus que $\pi(\partial\mathrm{G}, \Delta^*) \times \varphi(n, k)$ composantes en y des racines. Le point final est alors apporté par la proposition 1.

Ce travail a été effectué lors d'un séjour à l'I.H.E.S. (mai 1981). Bonne hospitalité de l'Institut et de N. Kuiper, traduction de J.-M. Kantor.

(*) Remise le 25 mai 1981.

[1] A. Hovansky, *Dokl. A.N. U.R.S.S.*, 255, 4, 1980, p. 804-807.
[2] O. A. Gelfond, *Sur les racines des quasi-polynômes*, preprint Institut de Physique A.S. U.R.S.S., 1979.
[3] O. A. Gelfond, *L'indice des champs de vecteurs quasi périodiques*, Preprint, I.P.A.S., U.R.S.S. (à paraître).
[4] A. Kouchnirenko, *Ouspekhi M. N.*, XXX, 2, 1975, p. 266-267.
[5] D. Bernstein, *Funct. Anal.*, 9, 8, 1975, p. 1-4.
[6] B. Kazarnovskii, *Dokl. A.N. U.R.S.S.*, 1981 (à paraître).
[7] A. Hovansky, *Théorème de Bezout pour les fonctions de Liouville*, preprint I.H.E.S. (à paraître).

~~*Mission du Musée national des Scien*~~
~~*Parc de la Villette, 211, avenue Jean-Jaurès, 75019 P.*~~

извини меня
(а то не выйдет!)